Εξέταση Ιουνίου 2020 - Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 90 ΛΕΠΤΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ακολουθούν 10 πολλαπλής επιλογής και σωστού λάθους (ανάμεικτα) για τα οποία δίνεται 1 ώρα, και στη συνέχεια ακολουθούν δύο ασκήσεις ανάπτυξης για τις οποίες δίνονται συνολικά 30 λεπτά.

Ερώτηση 1. Σωστό ή λάθος;
Η εκθετική συνάρτηση $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι η μοναδική συνεχής επέκταση στο $\mathbb{C}$ της εκθετικής συνάρτησης $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ερώτηση 2. Επιλέξτε το σωστό.
Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

(a) $a \coloneqq (1-i)^{2020}$.

(b) $b \coloneqq -2^{1010}e^{i505\pi}$.

(c) $c \coloneqq 2^{505}e^{i1010\pi}$.

(d) $d \coloneqq -2^{1010}$.

Ο μιγαδικός αριθμός a

(i) ισούται με τον b.

(ii) ισούται με τον c.

(iii) ισούται με τον d.

(iv) δεν ισούται με κανέναν από τους b, c, d.

Ερώτηση 3. Σωστό ή λάθος;
Σε κάθε ακέραια μιγαδική συνάρτηση αντιστοιχεί ένα μοναδικό άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ερώτηση 4. Η τιμή του ορίου

$$\lim_{z\to 1-i}(|z^2| - i\bar{z})$$

(i) $-i$.

(ii) 0.

(iii) $4-i$.

(iv) Κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 5. Σωστό ή λάθος;
Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Τότε, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,1)$.

Ερώτηση 6. Επιλέξτε το σωστό.
Τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ τα οποία πληρούν τη σχέση

$$|z-i| \leq |z-2|$$

είναι τα σημεία που ανήκουν στο σύνολο:

(i) $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \frac{3}{4} \right\}$.

(ii) $E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq \frac{3}{4} \right\}$.

(iii) $F = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq \frac{3}{2} \right\}$.

(iv) $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leq \frac{3}{2} \right\}$.

(v) Κανένα από τα αναφερόμενα.

Όπου $\Re(z)$ και $\Im(z)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος το μιγαδικού αριθμού z, αντίστοιχα.

Ερώτηση 7. Επιλέξτε το σωστό.
Έστω $f\colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \dfrac{z^8}{2\cos(z^2) - 2 + z^4}$, όπου $D \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : 2\cos(z^2) - 2 + z^4 \neq 0\}$.
Η συνάρτηση f στο 0 έχει

(i) πόλο πρώτης τάξης.

(ii) πόλο δεύτερης τάξης.

(iii) ουσιώδη ανωμαλία.

(iv) επουσιώδη ανωμαλία.

Ερώτηση 8. Επιλέξτε το σωστό.
Η συνάρτηση $f(x+iy) = xy + ixy$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου τα οποία βρίσκονται

(i) στον κώνο $y = |x|$.

(ii) στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

(iii) στην υπερβολή $y = \frac{1}{x}$.

(iv) στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1, -1)$ και $(-1, 1)$.

Ερώτηση 9. Σωστό ή λάθος;
Ισχύει:

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}.$$

Ερώτηση 10. Επιλέξτε το σωστό.
Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\partial D(0,2)} \frac{1}{(z+1)(z-3)} dz$ ισούται με

(i) $\frac{\pi}{2i}$.

(ii) $\frac{1}{\pi i}$

(iii) καμία από τις αναφερόμενες.

Ανάπτυξης [1]
Έστω $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, $r > 0$ και $t \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \log z \, dz$.

Ανάπτυξης [2]
Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $f\colon \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

$$\text{η } f \text{ έχει πόλο στο σημείο } a \text{ αν και μόνο αν } \lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$